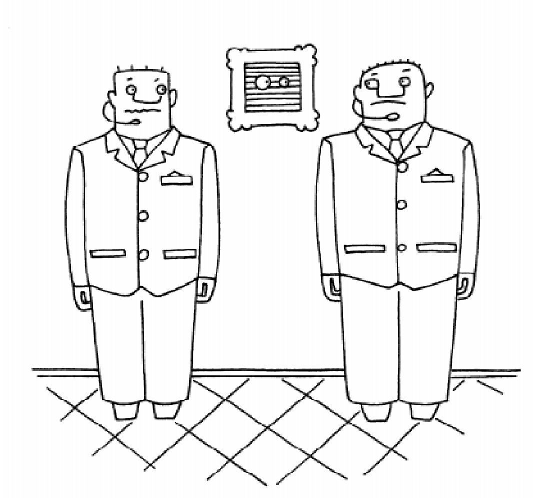
Посов Илья Александрович

РАЗБОР ЗАДАЧ «ОСВЕЩЕНИЕ ГОРОДА» ИЛИ «СВЕТ В ЛАБИРИНТЕ» КОНКУРСА КИО-2009



УСЛОВИЕ

Задачи «Освещение города» и «Свет в лабиринте» были предложены на конкурсе КИО «Конструируй, Исследуй, Оптимизируй» в 2009 году. В задаче требовалось расставить в городе (для участников первого уровня) или в лабиринте (для участников второго уровня) несколько светильников так, чтобы они освещали всю площадь города или лабиринта, и при этом их было как можно меньше. На рис. 1 и 2 изображены карты города и лабиринта. Темная область соответствует домам и стенам, светлая – свободному пространству. На рисунках приведены примеры расстановки светильников, на рис. 1 также можно увидеть пример области, которую освещает один из светильников. На обложке журнала размещены интерфейсы программ, с помощью которых участники решали задачи.

Задача известна под названием «Задача о Картинной Галерее», ее оригинальная постановка звучит следующим образом: картинная галерея имеет форму мно-

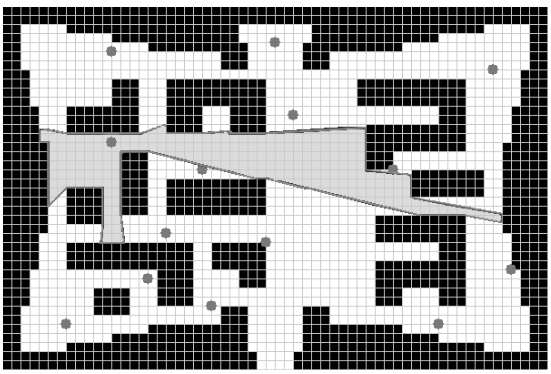


Рис. 1. Город

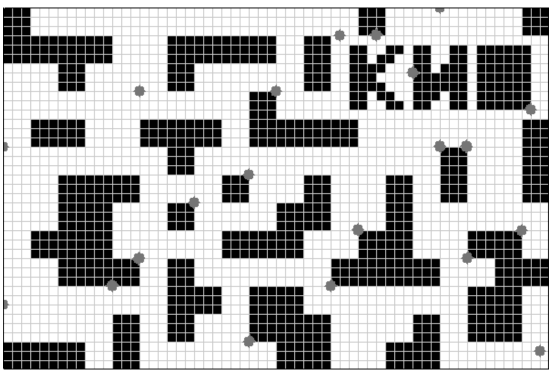


Рис. 2. Лабиринт

гоугольника. Необходимо расставить в ней минимальное число точек-охранников так, чтобы в область их наблюдения попадала вся площадь многоугольника. Формально говорят, что набор точек S наблюдает многоугольник, если для каждой точки q многоугольника существует точка s из S, такая что отрезок sq полностью лежит в многоугольнике. Задачу можно обобщить и считать, что наблюдать надо не многоугольник, а многоугольник с несколькими дырами многоугольной формы – именно эта ситуация имеется в виду в задаче, например, дома в городе – это вырезанные из многоугольника многоугольные дыры.

Задача о картинной галерее является вычислительно сложной, определить минимальное количество охранников для заданной галереи совсем не просто. Точнее, задача является NP-полной (Чтобы говорить об NP-полноте, задачу надо сформулировать так, чтобы ответ к ней был «да» или «нет». NP-полной является задача проверить, может ли заданное число охранников наблюдать заданную галерею).

Чтобы участники не подбирали решения, двигая светильники на 1 пиксель вперед или назад, программа позволяла устанавливать светильники только в вершины расположенной на поле крупной сетки.

РЕЗУЛЬТАТЫ УЧАСТНИКОВ

Задача не оказалась сложной для участников. Среди участников первого уровня 127 человек осветили город 14 фонарями, 203 человека – 15 фонарями, 82 – 16 фонарями, а остальные использовали 17 и более.

Во втором уровне 110 человек поставили 21 светильник, 81 – 22 светильника, 101 – 23 светильника, остальные – 24 и более.

Можно ли улучшить эти результаты и осветить город, например, не четырнадцатью фонарями, а тринадцатью? Опыт участников позволяет предположить, что, скорее всего, нет. Слишком многие придумали решение для четырнадцати, но никто из них не придумал для тринадцати. Оставим вопрос существования решения для тринадцати открытым, но докажем, что двенадцати фонарей не хватит никак.

На рис. 3 обозначены 13 точек. Они не находятся в вершинах сетки, как следует находиться расставляемым светильникам. Это просто точки, каждая из которых, по условию задачи, должна быть освещена. Вокруг каждой точки изображена область, в которой обязан находиться светильник, чтобы свет из него достигал этой точки. Здесь важно, что 13 точек подобраны так, чтобы соответствующие им области не пересекались. Это значит, что если город освещен полностью, то в каждой из областей должен находиться как минимум один светильник. Но областей 13, значит, и светильников, как минимум, 13.

Итак, менее чем 13 светильниками обойтись невозможно. Но, повторим, вопрос, хватает ли для освещения 13 светильников, остался открытым.

ОБСУЖДЕНИЕ ЗАДАЧИ

Задача о картинной галерее изучена хорошо. Использованная здесь постановка, как уже было сказано, делает задачу NP-полной и, следовательно, вряд ли существует алгоритм расстановки минимального числа охранников, работающий значительно эффективнее полного перебора вариантов. Более того, не известны и вряд ли существуют эффективные алгоритмы, которые решают задачу приближенно.

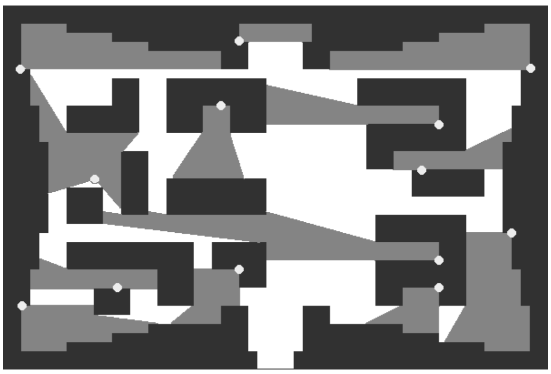


Рис. 3. Для освещения города необходимо минимум 13 светильников

Например, так, что получаемое число охранников не более чем в константу раз превышает минимальное.

Но отойдем от исходной постановки, забудем про форму города и лабиринта и поставим задачу иначе. Какое минимальное число охранников необходимо, чтобы наблюдать произвольный n-угольник? (Пока мы не будем обсуждать многоугольники с дырами, хотя дыры есть на карте города и лабиринта)

При $n = 3$ получается треугольник, и очевидно, что для наблюдения за произвольным треугольником достаточно всего одного охранника. Обозначим этот факт как $g(3) = 1$. При $n = 4$ получается четырехугольник, который может быть выпуклым или невыпуклым, но в обоих случаях его также можно наблюдать одним охранником. Следовательно, $g(4) = 1$. Три принципиально разных варианта формы пятиугольника изображены на рис. 4. Опять же, независимо от формы пятиугольника, для наблюдения за ним достаточно одного охранника: $g(5) = 1$.

В случае шестиугольника картина меняется. На рис. 5 приведены два примера шестиугольников, для которых недостаточно одного охранника, а необходимо использовать двоих: $g(6) = 2$.

Так можно продолжать и далее, но мы остановимся. Оказывается, $g(n) = [n/3]$, где $[x]$ означает целую часть числа x. Из всех теорем, связанных с задачей о картинной галерее, эта – самая простая, и далее мы ее докажем. Известны похожие оценки для случая многоугольников с дырами, ортогональных многоугольников (то есть таких как в задаче – все стороны многоугольника расположены либо вертикально, либо горизонтально), мы приведем их, но доказывать не будем – это на порядок сложнее и доказательство любознательный читатель может посмотреть в книге [1].

Теорема. В любом n-угольнике можно найти $[n/3]$ точек таких, что они наблюдают весь n-угольник.

При доказательстве мы увидим, что в качестве этих точек на самом деле можно выбрать вершины. Отдельно можно показать, что $[n/3]$ – точная оценка, то есть иногда для наблюдения за n-угольником необходимо ровно столько охранников. Рис. 6 поясняет сказанное.

Доказательство.

Приведем сначала набросок доказательства. Прежде всего докажем известный факт – любой многоугольник можно триангулировать, то есть разбить диагоналями на треугольники. Затем мы покажем, что вершины многоугольника можно покрасить в три цвета так, что каждый треугольник разбиения будет иметь вершины трех разных цветов (см. рис. 7). Этого достаточно для доказательства. Действительно, если n вершин покрашены в 3 цвета, то какой-то цвет встречается не более чем $[n/3]$ раз. Допустим, это цвет номер 1. Поместим во всех вершинах цвета 1 по охраннику. Но каждый треугольник по построению имеет вершину цвета 1, следовательно, каждый треугольник будет наблюдаться одним из охранников. Тогда и весь n-угольник будет наблюдаться охранниками.

Итак, докажем, что любой многоугольник можно триангулировать диагоналями. Для этого достаточно показать, что в любом многоугольнике можно провести хотя бы одну диагональ, находящуюся полностью внутри многоугольника. Потому что если такая диагональ проведена, то многоугольник распадается на два, в каждом

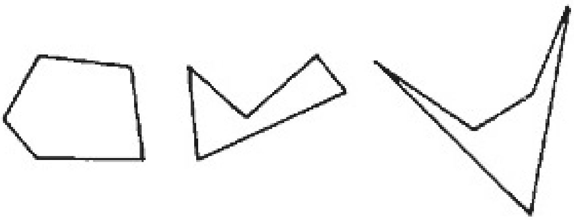


Рис. 4. Пятиугольники

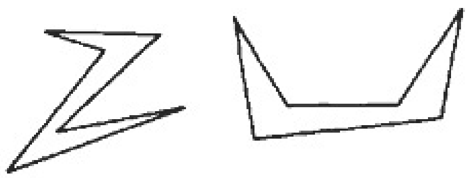


Рис. 5. Шестиугольники

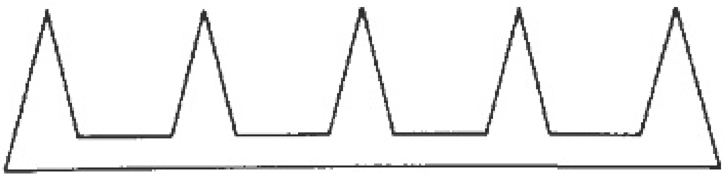


Рис. 6. Многоугольники этой формы требуют ровно [n/3] охранников для наблюдения

из которых также можно провести диагональ, и продолжаться это будет, пока многоугольник не разобьется на треугольники. Почему всегда можно провести внутреннюю диагональ? Предположим, что наш многоугольник выпуклый. В этом случае любая диагональ является внутренней и провести можно из них.

В невыпуклом многоугольнике есть вершина с углом более 180 градусов. Покажем, что из нее можно провести внутреннюю диагональ. Так как угол при вершине больше 180 градусов, то из нее видны несколько отрезков сторон, потому что каждый отрезок стороны виден под углом менее 180 градусов (см. рис. 8, видимые отрезки выделены жирной линией). В направлениях (обозначены пунктиром), в которых происходит смена видимого отрезка, можно провести внутреннюю диагональ. На рисунке это диагонали *AB* и *AC*.

Почему полученную триангуляцию можно покрасить в 3 цвета? Рассмотрим граф, в котором вершины соответствуют треугольникам и две вершины соединены, если соответствующие им треугольники имеют общую сторону (рис. 9). Нетрудно понять, что этот граф является деревом (для многоугольников с дырами это неверно). Действительно, если бы в графе нашелся цикл, он бы означал, что есть цикл из треугольников, внутри него вершина, следовательно, и внешняя часть многоугольника. В случае многоугольников без дыр это невозможно.

Любое дерево имеет как минимум две висячие вершины, то есть вершины, из которых выходит ровно одно ребро. Такие вершины соответствуют треугольникам-ушам, которые можно отрезать, и многоугольник останется многоугольником. Отрежем триангулированному многоугольнику уши и раскрасим его в три цвета. То есть мы считаем, что раскрашиваем многоугольник по индукции, и более маленький многоугольник раскрасить можно. Далее приделаем уши обратно. Две вершины треугольника-уха уже имеют цвета, оставшуюся третью вершину надо покрасить в третий еще не использованный цвет (рис. 9).

Таким образом, теорема доказана.

ДРУГИЕ ТИПЫ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В предложенной на конкурсе задаче многоугольники были ортогональными, то есть, как говорилось ранее, их стороны

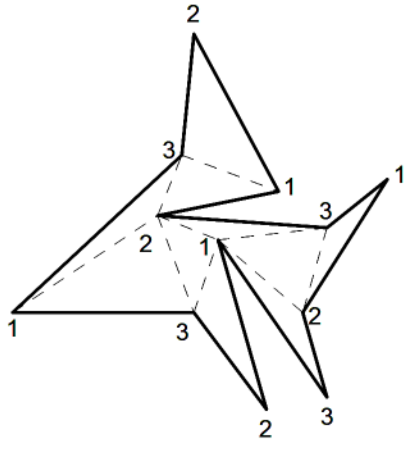


Рис. 7

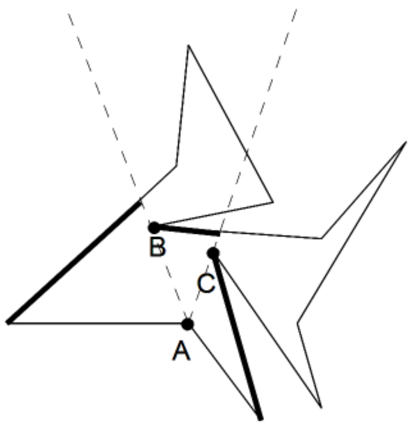


Рис. 8

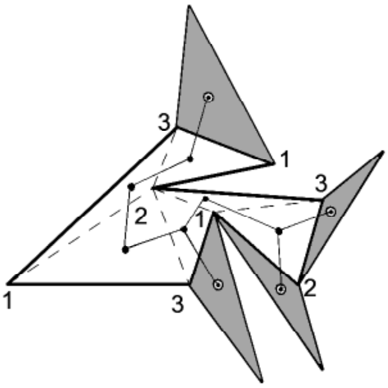


Рис. 9

расположены только вертикально и горизонтально. Углы в ортогональных многоугольниках равны 90 либо 270 градусов. Количество охранников, которое требуется для наблюдения такого многоугольника, меньше, чем для произвольного многоугольника. Аналогом теоремы из прошлого раздела является теорема, что для ортогонального многоугольника достаточно $[n/4]$ охранника. Эта оценка точна, то есть некоторые ортогональные многоугольники требуют ровно такого числа охранников. Доказать эту теорему значительно сложнее, чем предыдущую, разбиения многоугольника на треугольники уже недостаточно, и следует разбивать многоугольник на фигуры другой формы.

Дополнительной особенностью многоугольников из конкурса было то, что они содержали дыры. Для многоугольников с h дырами известно, что они должны наблюдаться $[(n + 2h)/3]$ охранниками или $[(n + 2h)/4]$ – для ортогональных многоугольников с ортогональными дырами. Здесь n – это количество вершин вообще, включая вершины, соответствующие дырам.

Существует гипотеза, что ортогональный многоугольник с дырами на самом деле наблюдается и $[n/4]$ охранниками. Для одной и двух дыр, то есть для $h = 1$ и $h = 2$, эта гипотеза доказана. Также есть и другие гипотезы. Они полагают, что для наблюдения за ортогональным многоугольником с дырами достаточно $[(n + h)/4]$ или $[3n/11]$ охранников.

Литература

1. *Joseph O'Rourke.* Art Gallery Theorems and Algorythms. Oxford University Press, 1987.

Посов Илья Александрович,
ассистент кафедры ВМ–2
СПбГЭТУ «ЛЭТИ».